

RİYAZİYYAT

УДК 517.977.58

**ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ****Р.К.ТАГИЕВ, Г.Ш.САФАРОВА***Бакинский Государственный Университет,
r.tagiyev@list.ru, gunew.seferova96@mail.ru*

В данной работе исследуется дискретная задача оптимального управления для разностного аналога эллиптического уравнения. Изучены вопросы корректности постановки рассматриваемой задачи, доказана дифференцируемость целевого функционала, получено необходимое и достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: оптимальное управление, разностный аналог эллиптического уравнения, корректность задачи, условие оптимальности.

Дискретные задачи оптимального управления возникают как модели в оптимизационных процессах, возникающие в задачах экономики, физики, техники [1,2] и др. Кроме того, с дискретными задачами оптимального управления имеем дело при аппроксимациях непрерывных задач оптимального управления [3-6] и др.

Различные классы задач оптимального управления дискретными системами с сосредоточенными параметрами достаточно полно изучены в работах многих авторов. Однако эти задачи для дискретных систем с распределенными параметрами исследованы существенно слабее.

В настоящей работе изучается дискретная задача оптимального управления для разностного аналога двумерного эллиптического уравнения. Исследованы вопросы корректности постановки задачи, доказана дифференцируемость целевого функционала и получена критерий оптимальности.

Необходимые обозначения

На квадрате $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in R^2: 0 < x_i < 1 (i = 1, 2)\}$ введем следующие множества сеточных узлов:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_i &= \{x_i = j h_i, j = 0, 1, \dots, N_i, N_i h_i = 1\}, \\ \omega_i &= \{x_i = j h_i, j = 1, 2, \dots, N_i - 1\}, \\ \omega_i^+ &= \{x_i = j h_i, i = 1, 2, \dots, N_i\}, \\ \omega_{i*} &= \{\bar{x}_i = (j - 0,5) h_i, i = 1, 2, \dots, N_i\} (i = 1, 2), \\ \omega &= \omega_1 \times \omega_2, \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2, \gamma = \bar{\omega} \setminus \omega, \omega^{(+1)} = \omega_1^+ \times \omega_2, \\ \omega^{(+2)} &= \omega_1 \times \omega_2^+, \omega_*^{(1)} = \omega_{1*} \times \omega_2, \omega_*^{(2)} = \omega_1 \times \omega_{2*}.\end{aligned}$$

Пусть на сетке $\bar{\omega}$ задана сеточная функция $y = y(x)$. Через

$$\begin{aligned}y_{\bar{x}_1} &= y_{\bar{x}_1}(x) = (y(x_1, x_2) - y(x_1 - h_1, x_2))/h_1, \\ y_{\bar{x}_2} &= y_{\bar{x}_2}(x) = (y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2))/h_2\end{aligned}$$

обозначаем левые разностные отношения, а через

$$\begin{aligned}y_{x_1} &= y_{x_1}(x) = (y(x_1 + h_1, x_2) - y(x_1, x_2))/h_1, \quad y_{x_2} = y_{x_2}(x) = \\ &= (y(x_1, x_2 + h_2) - y(x_1, x_2))/h_2\end{aligned}$$

- правые разностные отношения.

$\overset{\circ}{H}$ - пространство сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}$ и обращающихся в ноль на γ . $(y, u) = \sum_{x \in \omega} y(x)u(x)h_1 h_2$ - скалярное произведение и $\|y\|_{0, \omega} = (y, y)^{1/2}$ - норма в пространстве $\overset{\circ}{H}$.

$L_2(\omega)$ - пространство сеточных функций, заданных на ω со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и с нормой $\|\cdot\|_{0, \omega}$.

В $L_2(\omega)$ введем еще следующие нормы:

$$\|y_{\bar{x}_i}\|_i = \left(\sum_{x \in \omega^{(+i)}} y_{\bar{x}_i}^2 h_1 h_2 \right)^{1/2}, (i = 1, 2).$$

Постановка задачи и ее корректность

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления для разностного аналога эллиптического уравнения: требуется минимизировать сеточный функционал

$$J(v) = \sum_{x \in \omega} |y(x, v) - z(x)|^2 h_1 h_2 \quad (1)$$

при условии, что $y(x, v) = y(x)$ - решение сеточной краевой задачи

$$\begin{aligned}Ay \equiv & -[k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2)y_{\bar{x}_1}]_{x_1} - [k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2)y_{\bar{x}_2}]_{x_2} + \\ & + q(x)y = v(x), \quad x \in \omega,\end{aligned} \quad (2)$$

$$y(x, v) = 0, x \in \gamma \quad , \quad (3)$$

а сеточные управления $v(x), x \in \omega$ принадлежат множеству

$$V = \{v = v(x) \in L_2(\omega): \|v\|_{0,\omega} \leq R\} . \quad (4)$$

Здесь $R > 0$ – заданное число, $z(x), k_1(x), k_2(x), q(x)$ – заданные сеточные функции, удовлетворяющие условиям

$$0 < v \leq k_1(x) \leq \mu, x \in \omega_*^{(1)}, 0 < v \leq k_2(x) \leq \mu, x \in \omega_*^{(2)},$$

$$0 \leq q_0 \leq q(x) \leq q_1, x \in \omega, z(x) \in L_2(\omega), \quad (5)$$

где v, μ, q_0, q_1 – заданные числа.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5). Тогда для каждого фиксированного $v(x) \in L_2(\omega)$ сеточная краевая задача (2), (3) однозначно разрешима и для её решения справедлива оценка

$$\|y\|_{0,\omega} + \left(\|y_{\bar{x}_1}\|_1^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_2^2 \right)^{1/2} \leq C \|v\|_{0,\omega}, \quad (6)$$

где

$$C = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Доказательство. Покажем, что в пространстве $\overset{\circ}{H}$ оператор A из условия (2) является самосопряженным. Действительно, используя вторую разностную формулу Грина [7, с. 256], получаем

$$\begin{aligned} (Ay, u) &= - \sum_{x \in \omega} [k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2) y_{\bar{x}_1}]_{x_1} u h_1 h_2 - \\ &- \sum_{x \in \omega} [k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2) y_{\bar{x}_2}]_{x_2} u h_1 h_2 + \sum_{x \in \omega} q(x) u y h_1 h_2 = \\ &= - \sum_{x \in \omega} [k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2) u_{\bar{x}_1}]_{x_1} y h_1 h_2 - \sum_{x \in \omega} [k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2) u_{\bar{x}_2}]_{x_2} \\ &\quad \times \\ &\quad \times y h_1 h_2 + \sum_{x \in \omega} q(x) u y h_1 h_2 = (y, Au), \quad \forall y, u \in \overset{\circ}{H}, \end{aligned}$$

т.е. оператор A является самосопряженным в $\overset{\circ}{H}$.

Кроме того, применяя первую разностную формулу Грина [7, с. 256], используя условия (5) и разностного аналога неравенства Фри-

Фридрикса $\|y_{\bar{x}_1}\|_1^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_2^2 \geq 2\|y\|_{0,\omega}^2$ справедливое для всех функций

из $\overset{\circ}{H}$ [8, с.55], имеем

$$\begin{aligned}
 (Ay, y) &= - \sum_{x \in \omega} [k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2) y_{\bar{x}_1}]_{x_1} y h_1 h_2 - \\
 &- \sum_{x \in \omega} [k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2) y_{\bar{x}_2}]_{x_2} y h_1 h_2 + \sum_{x \in \omega} q(x) y^2 h_1 h_2 = \\
 &= \sum_{x \in \omega^{(+1)}} k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2) y_{\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 \\
 &+ \sum_{x \in \omega^{(+2)}} k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2) y_{\bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \\
 &+ \sum_{x \in \omega} q(x) y^2 h_1 h_2 \geq \nu \sum_{x \in \omega^{(+1)}} y_{\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \nu \sum_{x \in \omega^{(+2)}} y_{\bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \\
 &+ q_0 \sum_{x \in \omega} y^2 h_1 h_2 \geq (2\nu + q_0) \|y\|_{0,\omega}^2, \quad \forall y \in \overset{\circ}{H}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, оператор A является положительно определенным в $\overset{\circ}{H}$. Тогда задача (2), (3) однозначно разрешима.

Для доказательства оценки (6) применим метод энергетических неравенств [7, с.315]. После скалярного умножения обеих частей уравнения (2) на y , и применяя первую разностную формулу Грина, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in \omega^{(+1)}} k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2) y_{\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{x \in \omega^{(+2)}} k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2) y_{\bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \\
 + \sum_{x \in \omega} q(x) y^2 h_1 h_2 = \sum_{x \in \omega} \nu y h_1 h_2.
 \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условия (5), неравенства Коши-Буняковского и Фридрикса, получим оценку

$$\begin{aligned}
 \|y_{\bar{x}_1}\|_1^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_2^2 &\leq \frac{1}{\nu} \|v\|_{0,\omega} \|y\|_{0,\omega} \leq \\
 &\leq \frac{1}{\nu} \|v\|_{0,\omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\|y_{\bar{x}_1}\|_1^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_2^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

или

$$\left(\|y_{\bar{x}_1}\|_1^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_2^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{v\sqrt{2}} \|v\|_{0,\omega} . \quad (7)$$

Тогда, используя неравенство Фридрихса, из (7) имеем

$$\|y\|_{0,\omega} \leq \frac{1}{2v} \|v\|_{0,\omega} . \quad (8)$$

Сложив неравенства (7) и (8), получаем оценку (6). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5). Тогда существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $v_* = v_*(x) \in V$ задачи (1)-(4), т.е. множество

$$V_* = \{ v_* \in V : J(v_*) = J_* \equiv \inf\{J(v) : v \in V\} \}$$

не пусто. Кроме того, множество V_* компактно в $L_2(\omega)$ и любая минимизирующая последовательность $\{v_n(x) \subset V\}$ функционала $J(v)$ сходится в $L_2(\omega)$ к множеству V_* .

Доказательство. Покажем, что функционал (1) при условиях (2), (3) непрерывен в пространстве $L_2(\omega)$. Пусть $v \in L_2(\omega)$ – некоторый элемент, $\Delta v \in L_2(\omega)$ – приращение этого элемента, $\Delta y = \Delta y(x) = y(x, v + \Delta v) - y(x, v)$ – приращение решения краевой задачи (2), (3). Тогда из условий (2), (3) следует, что Δy является решением краевой задачи

$$A(\Delta y) \equiv -[k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2)\Delta y_{\bar{x}_1}]_{x_1} - [k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2)\Delta y_{\bar{x}_2}]_{x_2} + q(x)\Delta y = \Delta v(x), \quad x \in \omega, \quad (9)$$

$$\Delta y(x) = 0, \quad x \in \gamma. \quad (10)$$

Из теоремы 1 следует, что для функции Δy справедлива оценка

$$\|\Delta y\|_{0,\omega} + \left(\|\Delta y_{\bar{x}_1}\|_1^2 + \|\Delta y_{\bar{x}_2}\|_2^2 \right)^{1/2} \leq C \|\Delta v\|_{0,\omega}. \quad (11)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\|\Delta y\|_{0,\omega} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\Delta v\|_{0,\omega} \rightarrow 0. \quad (12)$$

Приращение $\Delta J(v) = J(v + \Delta v) - J(v)$ функционала (1) представим в виде

$$\Delta J(v) = 2 \sum_{x \in \omega} [y(x, v) - z(x)] \Delta y(x) h_1 h_2 + \|\Delta y\|_{0,\omega}^2. \quad (13)$$

Тогда используя неравенство Коши-Буняковского, из (13), имеем
 $|J(v + \Delta v) - J(v)| \leq 2 \|y(x, v) - z(x)\|_{0,\omega} \|\Delta y\|_{0,\omega} + \|\Delta y\|_{0,\omega}^2.$

Отсюда и из (12) следует, что
 $J(v + \Delta v) \rightarrow J(v)$ при $\|\Delta v\|_{0,\omega} \rightarrow 0,$

т.е. функционал $J(v)$ непрерывен на $L_2(\Omega).$

Кроме того, множество V из (4) является замкнуто и ограниченным в пространстве $L_2(\omega).$ Поэтому из теоремы Вейерштрасса [9, с.74]. следуют утверждения теоремы 2. Теорема доказана.

Дифференцируемость функционала цели и критерия оптимальности

Пусть функция $\psi(x) = \psi(x, v)$ является решением следующей сопряженной краевой задачи:

$$\begin{aligned} -[k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2)\psi_{\bar{x}_1}]_{x_1} - [k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2)\psi_{\bar{x}_2}]_{x_2} + q(x)\psi = \\ = 2[y(x, v) - z(x)], \quad x \in \omega, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\psi(x) = 0, \quad x \in \gamma. \quad (15)$$

Согласно теореме 1 для функции $\psi(x)$ справедлива оценка

$$\|\psi\|_{0,\omega} + \left(\|\psi_{x_1}\|_1^2 + \|\psi_{x_2}\|_2^2 \right)^{1/2} \leq 2C \|y(x, v) - z(x)\|_{0,\omega}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5). Тогда функционал (1) непрерывно дифференцируем на $L_2(\omega)$ и его градиент в точке $v \in L_2(\omega)$ имеет вид

$$J'(v) = \psi(x, v), \quad x \in \omega. \quad (16)$$

Доказательство. Приращение функционала (1) в точке $v \in L_2(\omega)$ имеет вид (13). Используя равенства (9), (10), (14), (15) и вторую разностную формулу Грина получаем

$$\begin{aligned} 2 \sum_{x \in \omega} [y(x, v) - z(x)] \Delta y(x) h_1 h_2 = \\ = \sum_{x \in \omega} \{ -[k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2)\psi_{\bar{x}_1}]_{x_1} - \\ - [k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2)\psi_{\bar{x}_2}]_{x_2} + q(x)\psi \} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\times \Delta y h_1 h_2 &= \sum_{x \in \omega} \{ - [k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2) \Delta y_{\bar{x}_1}]_{x_1} \\
&\quad - [k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2) \Delta y_{\bar{x}_2}]_{x_2} + q(x) \Delta y \} \psi h_1 h_2 \\
&= \sum_{x \in \omega} \psi \Delta v h_1 h_2.
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (13), получим

$$\Delta J(v) = \sum_{x \in \omega} \psi \Delta v h_1 h_2 + \|\Delta y\|_{0,\omega}^2. \quad (17)$$

Из оценки (11), имеем

$$\|\Delta y\|_{0,\omega}^2 \leq C^2 \|\Delta v\|_{0,\omega}^2. \quad (18)$$

Тогда из (17), (18) следует, что функционал (1) дифференцируем на $L_2(\omega)$ и его градиент имеет вид (16).

Покажем, что градиент $J'(v)$ функционала $J(v)$ удовлетворяет условию Липшица на $L_2(\omega)$. Пусть $\Delta \psi(x) = \psi(x + \Delta v) - \psi(x, v)$. Тогда из (14), (15) следует, что функция $\Delta \psi$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
&- [k_1(x_1 - 0,5 h_1, x_2) \Delta \psi_{\bar{x}_1}]_{x_1} - [k_2(x_1, x_2 - 0,5 h_2) \Delta \psi_{\bar{x}_2}]_{x_2} + \\
&\quad + q(x) \Delta \psi = 2 \Delta y(x), \quad x \in \omega, \\
&\quad \Delta \psi(x) = 0, \quad x \in \gamma.
\end{aligned}$$

Применяя теорему 1 и используя неравенство (11) получаем, что для решения этой краевой задачи верна оценка

$$\|\Delta \psi\|_{0,\omega} + \left(\|\Delta \psi_{\bar{x}_1}\|_1^2 + \|\Delta \psi_{\bar{x}_2}\|_2^2 \right)^{1/2} \leq 2C \|\Delta v\|_{0,\omega}. \quad (19)$$

Тогда из (16) и (19) следует, что

$$\begin{aligned}
\|J'(v + \Delta v) - J'(v)\|_{0,\omega} &= \|\psi(x, v + \Delta v) - \psi(x, v)\|_{0,\omega} = \\
&= \|\Delta \psi\|_{0,\omega} \leq 2C \|\Delta v\|_{0,\omega}
\end{aligned}$$

для всех $v, v + \Delta v \in L_2(\omega)$. Таким образом, градиент $J'(v)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 2C$. Тогда очевидно, что отображение $J'(v): L_2(\omega) \rightarrow L_2(\omega)$ непрерывно. Теорема доказана.

С помощью формулы градиента (16) и теоремы 3 [9, с. 165] можно установить необходимое и достаточное условие оптимальности управления в задаче (1)-(4).

Теорема 4. Пусть выполнены условия (5). Тогда для оптимальности управления $v_* = v_*(x) \in V$ в задаче (1)-(4) необходимо и достаточно выполнение неравенство

$$\sum_{x \in \omega} \psi(x, v_*) (v(x) - v_*(x)) h_1 h_2 \geq 0, \forall v = v(x) \in V.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. - Москва: Наука, - 1973, - 446 с.
2. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. - Минск. ИМ НАН Белоруси, - 2001, - 400 с.
3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - Москва: Наука, - 1981, - 400 с.
4. Тагиев Р.К. Об оценке скорости сходимости разностных аппроксимаций и регуляризации задач оптимального управления для линейного обыкновенного дифференциального управления второго порядка // Дифференц. уравнения, - 1989, - т. 25, - N.9, - с.42-45.
5. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. - Уфа: Уфимский гос. ун-т, - 1999, - 243 с.
6. Rafiq K. Tagiyev and Shahla I. Maharramli, Difference approximation of the inverse problem of determining the highest coefficient in a parabolic equation with integral conditions // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. Volume 49, number 1, 2023, pages 38 – 49.
7. Самарский А.А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. - Москва: Наука, - 1976, - 352 с.
8. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. - Москва: Выш. шк., - 1987, - 296 с.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - Москва: Наука, - 1988, - 550 с.

ELLİPTİK TƏNLİYİN FƏRQ ANALOQU ÜÇÜN BİR DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

R.Q.TAĞIYEV, G. Ş.SƏFƏROVA

XÜLASƏ

Bu işdə elliptik tənliyin fərq analoqu üçün diskret optimal idarəetmə məsələsi öyrənilir. Baxılan məsələnin qoyuluşunun korrektiliyi tədqiq olunmuş, məqsəd funksionalının diferensiallanması isbat edilmiş, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt alınmışdır.

Açar sözlər: optimal idarəetmə, elliptik tənliyin fərq analoqu, məsələnin korrektiliyi, optimallıq şərti.

ON E DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A DIFFERENCE ANALOG OF AN ELLIPTIC EQUATION

R.K.TAGIYEV, G.Sh.SAFAROVA

SUMMARY

In the paper, we study a discrete optimal control problem for a difference analog of an elliptic equation. The correctness of the problem formulation has been investigated. The differentiability of the objective functional has been proved, and the necessary and sufficient conditions for optimality have been obtained.

Keywords: optimal control, difference analog of elliptic equation, correctness of problem, optimality condition.